

# 1<sup>ο</sup> Επαναληπτικό Τεστ Απειροστικός Λογισμός 1

## Διάρκεια 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

### Θέμα 1

Να απαντήσετε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδείς με πλήρη αιτιολόγηση.

- (i) Ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[ \frac{1}{x-2} \right]^{-1} = +\infty$ , όπου  $[\cdot]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  είναι η συνάρτηση του ακεραίου μέρους πραγματικού αριθμού.
- (ii) Η ακολουθία  $x_n = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  δεν είναι μονότονη και συγκλίνει.
- (iii) Ισχύει:  $\lim_n [n(\ln \sqrt{n+1} - \ln \sqrt{n})] = +\infty$ .
- (iv) Η μοναδική συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία  $f'(x) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι η εκθετική  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (v) Υπάρχει συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη μόνο στα σημεία 0 και 1.

### Θέμα 2

- (i) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $p > 1$ ,  $\lim_n \frac{n}{p^n} = 0$ .
- (ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $p > 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{p^x} = 0$ .
- (iii) Να βρεθεί (αν υπάρχει) το supremum του συνόλου

$$A = \left\{ \frac{2m}{3m+n} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

### Θέμα 3

- (i) Να δείξετε ότι  $\ln x < x$ , για κάθε  $x > 1$ .
- (ii) Να εξετάσετε αν η ακολουθία

$$x_n = 1 + \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

είναι ακολουθία Cauchy.

### Θέμα 4

Έστω μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία αληθεύει:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{(x-y)^2}{2021}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι σταθερή.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!